View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Jurnal Online Universitas Pekalongan

PEMBENTUKAN MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN PEMANENAN PADA PEMANGSA

Saiful Marom
Pendidikan Matematika FKIP
Universitas Pekalongan
Jalan Sriwijaya No 3 Pekalongan, Maromsaiful@yahoo.com

ABSTRAK

The Models of a predator prey with threshold harvesting on the predator is studied in this paper. In this article has established predator prey models with prey-dependent functions and the repon harvesting on predator assuming given.

Kata Kunci : predator prey models, boundedness of solution, local stability

Pendahuluan

Makhluk hidup didunia ini terdiri dari berbagai macam spesies sehingga terbentuk sebuah populasi dan hidup berdampingan bersama-sama. Makhluk hidup didunia ini saling ketergantungan antara makhluk hidup yang satu dengan yang lainnya. Setiap individu akan menjalin hubungan dengan individu yang lain baik dalam satu spesies ataupun dengan spesies yang lain. Ada beberapa hubungan yang terjadi antara individu yang satu dengan yang lain salah satunya adalah hubungan antara mangsa dengan pemangsa. Hubungan mangsa pemangsa antara individu dengan individu yang lain sangat erat sekali karena tanpa mangsa maka pemangsa tidak akan bisa bertahan hidup begitupun sebaliknya tanpa pemangsa maka populasi mangsa akan terjadi ledakan populasi sehingga akan mengganggu kestabilan ekosistem.

Salah satu penyebab kepunahan populasi adalah tingkat pemangsaan terhadap mangsa yang sangat tinggi dan rendahnya tingkat pertumbuhan mangsa atau rendahnya populasi awal dari populasi mangsa.

Untuk mengendalikan populasi pemangsa sehingga dapat menyebabkan punahnya populasi mangsa adalah dengan melakukan pemanenan pada populasi pemangsa. Sebaliknya, untuk mengendalikan populasi pemangsa supaya tidak punah maka akan dilakukan pembatasan pemanenan pada populasi pemangsa. ketika populasi pemangsa mencapai ambang batas pemanenan maka pemangsa akan dilakukan pemanenan.

Pembentukan Model Mangsa Pemangsa

Untuk mengkunstruksi model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Michaelis-Menten pada populasi mangsa dan pemangsa dengan dilakukan pemanenan pada populasi pemangsa maka diperlukan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Dalam model ini hanya ada dua spesies yaitu mangsa *(prey)* dan pemangsa *(predator).*
2. Persedian makanan untuk mangsa cukup.
3. Persediaan makanan pemangsa bergantung pada populasi mangsa.
4. Populasi mangsa akan menurun pada saat terjadinya interaksi mangsa dengan pemangsa karena mangsa akan dikonversi oleh pemangsa untuk kebutuhan pertumbuhannya.
5. Populasi pemangsa akan meningkat pada saat terjadinya interaksi mangsa dan pemangsa karena mangsa akan dikonversi oleh pemangsa untuk kebutuhan pertumbuhannya.
6. Gerakan dan kontak mangsa dan pemangsa berlangsung secara acak sehingga setiap individu mangsa memiliki peluang yang sama untuk dimangsa.
7. Dalam interaksi, mangsa merespon kehadiran pemangsa sehingga pemangsa memerlukan waktu untuk menangkap mangsa.
8. Pada populasi pemangsa dilakukan pemanenan setelah banyaknya populasi pemangsa mencapai ambang batas pemanenan.

Model Dasar Mangsa Pemangsa

Sebelum mengkonstruksi model mangsa dengan pemanenan pada mangsa maka akan terlebih dahulu diberikan model dasar mangsa pemangsa yaitu Model *Lotka Volterra* (1926) :

$$\frac{d\hat{x}}{d\tau} = r\hat{x} - s\hat{x}\hat{y}$$
$$\frac{d\hat{y}}{d\tau} = es\hat{x}\hat{y} - f\hat{y}$$

$$(3.1.2.1)$$

Dalam persamaan $(3.1.2.1)$, $\hat{x}$ menyatakan angka kepadatan populasi mangsa, $\hat{y}$ menyatakan angka kepadatan populasi pemangsa dan τ adalah waktu. Persamaan $\frac{d\hat{x}}{d\tau}$ menyatakan perubahan kepadatan populasi mangsa terhadap waktu dan $\frac{d\hat{y}}{d\tau}$ menyatakan perubahan kepadatan populasi pemangsa terhadap waktu. Konstanta r, s, e, dan f semua bernilai positif.

Model $(3.1.2.1)$ berdasarkan asumsi-asumsi 3.1 memberikan pengertian bahwa:

1. r adalah angka pertumbuhan pada populasi mangsa, populasi mangsa tumbuh secara logistik .
2. f adalah angka kematian alami pada populasi pemangsa.
3. s adalah angka penurunan kepadatan populasi mangsa karena terjadinya interaksi antara mangsa dan pemangsa.
4. e adalah angka pertumbuhan kepadatan populasi pemangsa karena terjadinya interaksi antara mangsa dan pemangsa.
5. $\hat{x}\hat{y}$ adalah lambang terjadi interaksi antara mangsa dan pemangsa.

Laju pertumbuhan perkapita populasi mangsa adalah selisih dari laju pertumbuhan intrinsik dengan laju berkurangnya populasi mangsa akibat interaksi dengan pemangsa. Laju pertumbuhan perkapita populasi pemangsa merupakan pertambahan laju kelahiran pemangsa karena interaksi dengan mangsa dikurangi laju kematian pemangsa.

Dalam kehidupan yang nyata saat ini, model persamaan $(3.1.2.1)$ sudah tidak relevan karena populasi mangsa tidak selamanya meningkat atau populasi pemangsa tidak semalanya menurun. Dalam interaksi antara populasi mangsa terdapat respon dari mangsa dan terjadinya pencemaran lingkungan dalam ekosistem yang menyebabkan keracunan pada populasi mangsa dan pemangsa sehinnga model perlu dikembangkan. Untuk menjawab permasalahan tersebut, model dikembangkan dengan menambahkan fungsi logistik, fungsi racun, dan fungsi respon yang kelak bisa lebih relevan dari model sebelumnya. Berikut akan diberikan fungsi respon tersebut:

Fungsi Respon

$s\hat{x}$ yang diperoleh dari model $(3.1.2.1)$ merupkan representatif dari banyaknya mangsa yang ditangkap pemangsa persatuan daerah. Berdasarkan asumsi 7 dalam 3.1, diperoleh representatif baru yang menyatakan bahwa banyaknya mangsa persatuan daerah yang ditangkap $(g(z))$ berbanding lurus dengan angka penurunan kepadatan populasi mangsa karena terjadinya interaksi antara mangsa dan pemangsa (s), kepadatan populasi mangsa $(\hat{x})$, dan waktu menangkap dan mengkonsumsi mangsa yang didapat oleh pemangsa (T) sehingga dinotasikan:

$$g(z) = s\hat{x}T$$

$(3.1.3.1)$

Lebih lanjut, waktu T adalah waktu yang diperlukan pemangsa untuk menangkap dan mengkonsumsi mangsa, dinotasikan dengan:

$$T = T_s + T_h g(z)$$

$(3.1.3.2)$

di mana T_s adalah waktu efektif yang diperlukan untuk menangkap mangsa, T_h adalah waktu rata-rata yang diperlukan pemangsa mengkomsumsi mangsa yang didapat, dan $T_h g(z)$ adalah waktu yang diperlukan pemangsa mengkonsumsi mangsa yang didapat. Dari persamaan $(3.1.3.2)$ diperoleh $T_s = T - T_h g(z)$ sehingga fungsi waktu dari persamaan $(3.1.3.1)$ menjadi lebih relevan karena jumlah mangsa yang ditangkap akan berbanding lurus dengan waktu efektif yang diperlukan untuk menangkap mangsa. Persamaan $(3.1.3.1)$ menjadi $g(z) = s\hat{x}\left(T - T_h g(z)\right)$,

$$g(z) = s\hat{x}\left(T - T_h g(z)\right) \Leftrightarrow g(z) = s\hat{x}T - s\hat{x}T_h g(z)$$

$$\Leftrightarrow g(z) + sT_h\hat{x}g(z) = s\hat{x}T$$

$$\Leftrightarrow g(z)\left(1 + sT_h x\right) = s\hat{x}T$$

$$\Leftrightarrow \frac{g(z)}{T} = \frac{s\hat{x}}{\left(1 + sT_h\hat{x}\right)}$$

$$\Leftrightarrow R(\hat{x}) = \frac{s\hat{x}}{\left(1 + p\hat{x}\right)} \quad ; sT_h = p$$

$(3.1.3.3)$

dengan $\frac{g(z)}{T} = R(\hat{x})$ menyatakan kepadatan mangsa yang ditangkap per satuan waktu secara efektif dan $R(\hat{x})$ lebih dikenal dengan fungsi respon bergantung mangsa (Michaelis-Menten atau Holling tipe II).

Selanjutnya akan diberikan pembahasan mengenai fungsi logistik sebagai berikut:

Fungsi Logistik

Populasi mangsa tidak selamanya meningkat atau populasi pemangsa tidak semalanya menurun, tetapi dapat terjadi jika populasi naik maka angka pertumbuhan cenderung turun. Bahkan untuk populasi yang cukup besar, bukan mustahil angka pertumbuhan negatif. Fenomena ini disebabkan area dan fasilitas hidup terbatas atau daya dukung lingkungan atau Kapasitas Batas *(Carrying Capasity)*.

Misalkan dalam populasi terdapat $\hat{x}$ individu mangsa dan Kapasitas batas dilambangkan K. Sehingga kapasitas batas yang tersisa adalah $K-\hat{x}$ individu. Jadi masih ada $\frac{K-\hat{x}}{K}$ bagian lingkungan atau area yang masih bisa ditinggali. Bagian inilah yang sebanding dengan pertumbuhan populasi. Sehingga terbentuk persamaan pertumbuhan populasi perkapita sebagai berikut:

$$\frac{d\hat{x}}{d\tau}=r\hat{x}\left(\frac{K-\hat{x}}{K}\right) \qquad (3.1.4.1)$$

Persamaan $(3.1.4.1)$ merupakan persamaan pertumbuhan logistik**.**

Dari persamaan $(3.1.4.1)$ diperoleh:

$$\frac{d\hat{x}}{d\tau}=r\hat{x}\left(\frac{K-\hat{x}}{K}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\hat{x}}{d\tau}=\hat{x}\left(r-\frac{r}{\mathrm{K}}\hat{x}\right) \qquad (3.1.4.2)$$

Dari persamaan $(3.1.4.2)$ diperoleh r adalah angka pertumbuhan populasi mangsa tanpa pengaruh lingkungan dan $\frac{r}{\mathrm{K}}$ adalah angka penurunan populasi mangsa karena pengaruh lingkungan yaitu angka penurunan kepadatan populasi karena pengaruh kapasitas batas.

Selanjutnya, akan mengkonstruksi model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Michaelis-Menten pada populasi mangsa dan pemangsa dengan cara model dasar mangsa pemangsa *Lotka Volterra* yang dimodifikasi dengan fungsi respon Michaelis-Menten dan fungsi logistik, berikut kontruksinya:

$$\frac{d\hat{x}}{d\tau}=r\hat{x}\left(1-\frac{\hat{x}}{K}\right)-\frac{s\hat{x}\hat{y}}{1+p\hat{x}}$$
$$\frac{d\hat{y}}{d\tau}=\hat{y}\left(-f+\frac{n\hat{x}}{1+p\hat{x}}\right)\ ; n=es \qquad (3.1.5.1)$$

Dengan:

$\hat{x}$ menyatakan angka kepadatan populasi mangsa.

$\hat{y}$ menyatakan angka kepadatan populasi pemangsa.

r menyatakan angka pertumbuhan intrinsik mangsa.

K menyatakan kapasitas batas atau daya dukung lingkungan.

s menyatakan angka penurunan mangsa karena ditangkap pemangsa.

n menyatakan angka pertumbuhan populasi pemangsa.

p menyatakan tingkat respon dari mangsa saat ingin dimangsa.

f menyatakan angka kematian pemangsa.

Selanjutnya, model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Michaelis-Menten pada populasi mangsa dan pemangsa yang memiliki banyak parameter perlu disederhanakan supaya lebih mudah untuk mencari solusi dari permasalahan-permasalahan yang terkait. Menurut definisi 2.7, metode yang digunakan yaitu penondimensionalan. Berikut ini diberikan penondimensionalan model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Michaelis-Menten pada populasi mangsa dan pemangsa pada ekosistem yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{axy}{(1+mx)} - jx^3$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(-d + \frac{bx}{(1+mx)}\right) - ly^2$$

$(3.1.6.2.2)$

Dimana $a = \frac{sK}{zr}$, $b = \frac{nK}{r}$, $d = \frac{f}{r}$, $l = \frac{gK^2}{rz^2}$, $j = \frac{iK^2}{r}$, dan $m = pK$.

Selanjutnya berdasarkan asumsi 8 bahwa pada model dilakukan pemanenan pada pemangsa ketika pemangsa mencapai ambang batas pemanenan T sehingga diperoleh :

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{axy}{(1+mx)} - jx^3$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(-d + \frac{bx}{(1+mx)}\right) - ly^2 - H(x)$$

dengan :

$$H(x)\begin{cases} 0 & T < y \\ h & T \geq y \end{cases}$$

Simpulan

Jadi diperoleh model mangsa pemangsa dengan pemanenan sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{axy}{(1+mx)} - jx^3$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(-d + \frac{bx}{(1+mx)}\right) - ly^2 - H(x)$$

dengan :

$$H(x)\begin{cases} 0 & T < y \\ h & T \geq y \end{cases}$$

Saran

Dengan adanya keterbatasan penulis sehingga yang tertarik bisa mengembangkan model ini dengan membahas masalah Titik keseimbangan model, kestabilan global, masalah bifurkasi, mengembangkan model tersebut dengan memodifikasi fungsi pemanenan, menambahkan simulasi numerik dengan menggunakan program lainnya sehingga bisa lebih mudah untuk melihat simulasi numeriknya.

Daftar Pustaka

Asfaw, T. M., 2009, *Dynamics of generalized time dependent predator-prey model with nonlinear harvesting*, Int. J. Math. Anal. **3**, 1473–1485.

Birkhoff, H. and Rota, G.C., 1989, *Ordinary Differentials Equations*, 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc, New - York, USA.

Blanchard, P., Devaney, R.L. and Hall, G.R., 2006, *Differential Equations*, ThomsonBrooks/Cole, Belmont.

Bohn, J., Rebaza, J., and Speer, K., 2011, *Continuous Threshold Prey Harvesting in Predator-Prey Models*, International Journal of Computational and Mathematical Science., 1, 111-118.

Ginzburg, L.R., Akcakaya, H.R. and Arditi, R., 1995, *Ratio-Dependent Predation*: *An Abstraction that Works*, Ecology, 76, 995-1004.

Khalil, H.K.**,**2002**,***Nonlinear Systems* , 3rd edition, Prentice Hall, New Jersey , USA.

Leard, B., Lewis, C. and Rebaza, J., 2008, *Dynamics of Ratio-Dependent Predator-Prey Models with Nonconstant Harvesting*, Disc. Cont. Dyn. Syst. S, 1, 303-315.

Lynch, S., 2010, *Dynamical Systems with Applications Using Maple*, Birkhauser, Boston.

Perko, L., 2001, *Differential Equations and Dynamical Systems* .Texts in Applied Mathematics Vol. 7, Springer –Verlag , New – York , USA.

Ross, S.L., 1984, *Differential Equations*, 3th Edition, John Wiley & Sons, Inc, New - York, USA.

Tu, Pierre, N.V., 1994, Dynamical System : *a intoduction with application in Economis and Bioloogy*,Springer –Verlag , New-York, USA.

Verhulst, F.,1990,*Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer –Verlag, New-York, USA.

Xiao, D. and Ruan, S., 2001, *Global Dynamics of A Ratio-Dependent Predator-PreySystem*, J. Math. Biol., 43, 268-290.